UNIVERSITE PAUL SABATIER
Parcours Sciences Physiques et Chimiques- L3 **2010–2011**

Thermodynamique Statistique

Partiel Novembre 2010 (durée 1 H 30)

I.-. Question de cours : énergie moyenne et ses fluctuations dans l'ensemble canonique. (5 pts)

En utilisant la définition de la fonction partition Z et la probabilité P_l de trouver le système dans l'état *(l)* d'énergie E_l :

1. Montrer que l'énergie moyenne <E> s'écrit : $\langle E \rangle = -\dfrac{\partial\, Ln(Z)}{\partial\, \beta}$ où $\beta = \dfrac{1}{k_B\, T}$

2. Montrer que la variance de l'énergie $(\Delta E)^2$ est donnée par : $(\Delta E)^2 = k_B\, T^2\, C_V$ où C_V est la capacité thermique à volume constant.

3. Calculer le taux de fluctuations $\Delta E / \langle E \rangle$ pour une mole de gaz parfait classique à la température ambiante, en fonction du nombre d'Avogadro N_A. Quelles conclusions peut-on tirer de ce résultat ?

II.- Micro-états de translation de trois particules se déplaçant librement sur un segment de longueur L. (7 pts)

Soient trois particules indépendantes, de même masse *m*, se déplaçant librement sur un segment de longueur *L* suivant l'axe *Ox*.

1. Définir l'espace des phases permettant d'étudier son mouvement. Préciser sa dimension. Déterminer l'impulsion *p* et l'énergie *E* du système.

2. Déterminer, à l'aide des deux sous espaces des vecteurs de position ***r*** et des vecteurs d'impulsion ***p*,** le " volume" Γ de l'espace des phases accessible aux 3 particules si la norme de l'impulsion de chaque particule est comprise entre p_x et p_x et $p_x + dp_x$. Déterminer le "volume" d'une cellule élémentaire d'Heisenberg dans l'espace des phases des 3 particules.

3. En déduire le nombre de micro-états accessibles aux trois particules Ω^* (*p*) lorsque la norme de l'impulsion de chaque particule est comprise entre p_x et $p_x + dp_x$.

4. Calculer la densité d'états d'énergie $\rho(E)$.

III – Système à deux niveaux dans l'ensemble microcanonique. (9 pts)

On considère un système macroscopique formé de N particules (spins) susceptibles de n'occuper que deux états d'énergie $-\varepsilon_0$ et ε_0. Ces N spins sont placés dans un champ magnétique extérieur $\boldsymbol{B}$. Dans ce cas, $\varepsilon_0 = \mu_B B$ où μ_B est le moment magnétique (ou magnéton de Bohr) et B la norme du champ magnétique. On désigne respectivement par n_1 et n_2 le nombre de particules ayant chacune son énergie respectivement égale à $-\varepsilon_0$ et ε_0, et par M la différence n_2-n_1.

1. Exprimer l'énergie E d'un état macroscopique en fonction de M et ε_0. Exprimer ensuite n_1 et n_2 en fonction de E, N et ε_0, N étant fixé par l'hypothèse microcanonique.

2. Déterminer le nombre $\Omega^*(E, N)$ de configurations microscopiques (ou micro-états) correspondant à l'énergie macroscopique E, c'est-à-dire le nombre de choix possibles pour les n_1 particules d'énergie $-\varepsilon_0$ parmi le nombre total de particules N, N étant fixé par l'hypothèse microcanonique.

3. Définir l'entropie S^* du système. Que peut-on dire du système lorsque $|M| = N$? Que vaut alors l'entropie S* ? Dans l'hypothèse où $n_1 >> 1$ et $n_2 >> 1$, Montrer que l'entropie S^* a pour expression :

$$S^* = -N\, k_B\, [(\frac{1-x}{2})\ Ln(\frac{1-x}{2}) + (\frac{1+x}{2})\ Ln(\frac{1+x}{2})] \text{ avec } x = \frac{E}{N\,\varepsilon_0}$$

4. Calculer la température microcanonique T^*. Montrer qu'on peut l'exprimer sous la forme : $\dfrac{1}{T^*} = \dfrac{k_B}{2\,\varepsilon_0}\ Ln(\dfrac{1-x}{1+x})$

5. On suppose que l'on peut mettre le système dans un état d'énergie $E > 0$. Quel est le signe de sa température (statistique) microcanonique? Quelle la signification physique de cet état macroscopique en termes du nombre de particules (« population ») sur chacun des deux niveaux d'énergie $-\varepsilon_0$ et ε_0? Cet état est-il thermodynamiquement stable ?

Rappels :

Approximation de Stirling : $Ln\ N! = N\ LnN - N$ **(pour N>>1)**

$$\{\ f(x)\, Ln[f(x)]\}' = f'(x)\{[Ln[f(x)] + 1]\}$$